



TITLE:

# g-metrizable spaceについて(位相空間論と集合論の研究)

AUTHOR(S):

小竹, 義朗

---

CITATION:

小竹, 義朗. g-metrizable spaceについて(位相空間論と集合論の研究). 数理解析研究所講究録 1986, 584: 46-51

ISSUE DATE:

1986-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99355>

RIGHT:

# $g$ -metrizable space について

群馬大・教養 小竹 義朗 (Yoshiro Kotake)

A. V. Arhangel'skiĭ は [A] で symmetric space の研究に関連して weak base の概念を導入した。ここで, symmetric space とは 空間  $(X, d)$  が 次の (i) ~ (iii) を満たすことである。

- (i)  $d(x, y) \geq 0$ , 等号が成立  $\Leftrightarrow x = y$ .
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii)  $X \supset A$  : closed in  $X \Leftrightarrow \forall x \notin A$  に対し  
 $d(x, A) > 0$

Symmetric space  $(X, d)$  において,

$$U(n, x) = \{y \mid d(x, y) < \frac{1}{n}\}$$

$$Bx = \{U(n, x) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{とおく。}$$

$$X \supset G : \text{open in } X \Leftrightarrow \forall x \in G \text{ に対し}$$

$$\exists U(n, x) \in Bx, \text{ st. } U(n, x) \subset G$$

となることがわかる。symmetric space においては,  $U(n, x)$  は必ずしも  $x$  の nbd. とはならない。そこで Arhangel'skiĭ

は次の weak base の概念を導入した。

定義 1.  $\mathcal{B}_x$  を space  $X$  の部分集合の collection であって、次の条件を満たすものとする。

$$(i) \quad \forall B \in \mathcal{B}_x \rightarrow x \in B.$$

$$(ii) \quad \forall B, B' \in \mathcal{B}_x \rightarrow B \cap B' \in \mathcal{B}_x.$$

$$(iii) \quad X \supset U: \text{open} \iff \forall x \in U \text{ に対し, } B \subset U \\ \text{となる } B \in \mathcal{B}_x \text{ が存在する。}$$

このとき,  $\mathcal{B}_x$  を weak neighborhood of  $x$ ,

$\mathcal{B} = \bigcup \{ \mathcal{B}_x \mid x \in X \}$  を  $X$  の weak base とする。

特に,  $|\mathcal{B}_x| \leq \aleph_0$  for  $\forall x \in X$  とできるとき,  $X$  は weakly first countable (又は  $\mathfrak{f}$ -axiom of countability を満たす) であるという。従って symmetric space は weakly first-countable であることがわかる。

F. Simier は [5] で次の  $\mathfrak{f}$ -metrizable space の概念を導入し,  $\mathfrak{f}$ -metrizable space と  $cs$ -network をもつ空間との関係について述べている。

定義 2  $\sigma$ -locally finite weak base をもつ regular space を  $\mathfrak{f}$ -metrizable space とする。

$g$ -metrizable space が興味をもたれるのは、次の定理により示している事実から他の generalized metric spaces の特徴付け等に有効と考えられるからである。

定義 3  $\mathcal{N}$ : collection of subsets of  $X$ ,

$\mathcal{N}$ :  $k$ -network  $\iff \forall K$ : compact subset of  $X$

$K$  の nbd.  $\mathcal{U}$  に対し,  $K \subset \bigcup \mathcal{N}' \subset \mathcal{U}$  を満たす  $\mathcal{N}$  の finite subcollection  $\mathcal{N}'$  が存在する。

定理 1 (L. Foged. [F, ]) regular space  $X$  について、  
次は同値。

- (i)  $X$ :  $g$ -metrizable
- (ii)  $X$ : weakly first countable  $\iff \sigma$ -locally finite  $k$ -network  $\exists$  する。

定理 2 (P. O'Meara [O]) regular space  $X$  について  
次は同値

- (i)  $X$ : metrizable
- (ii)  $X$ : first countable  $\iff \sigma$ -locally finite  $k$ -network  $\exists$  する。

定理3 (L. Foged [F<sub>3</sub>]) regular space  $X$  について  
次は同値.

- (i)  $X$ : Lashnev space.
- (ii)  $X$ : Fréchet space かつ  $\sigma$ -hereditarily closure preserving  $k$ -network をもつ.

これらの定理から自然に次の問題が考えられる.

問題1.  $\sigma$ -closure preserving (又は  $\sigma$ -hereditarily closure preserving) weak base をもつ空間を特徴付けよ.

問題2. (L. Foged [F<sub>3</sub>]) normal  $g$ -metrizable space は  $M_1$ -space か?

R. W. Heath, R. E. Hodel 等により  $g: N \times X \rightarrow \tau$  なる写像を用いて generalized metric space を特徴付ける手法が研究された。同様の考えを用いて,  $g: N \times X \rightarrow \{A \mid A \subset X\}$  なる写像で,  $Bx = \{g(n, x) \mid n \in N\}$  が  $X$  の weak abd. となるものを用いて, generalized metric spaces を研究する  
ことが K. B. Lee [L], H. W. Martin [M], Y. Inni

and Y. Kotaka [I] 等により行われてゐる。

定義3 (K. Lee [L])  $X$ :  $g$ -developable  $\iff$  次の (i) ~ (iii) を満たす  $g: N \times X \rightarrow$  Power set of  $X$  が存在する。

(i)  $x \in g(n, x), g(n+1, x) \subset g(n, x)$  for  $\forall x \in X, \forall n \in N$

(ii)  $B_x = \{g(n, x) \mid n \in N\}$ : weak nbd base of  $x$

(iii)  $x, x_n \in g(n, y_n)$  for  $\forall n$   
 $\rightarrow \{x_n\}$ : converges to  $x$ .

この  $g$ -developable space については,  $g$ -metrizable space であつて, not  $g$ -developable space なる空間の存在が知られてゐる。([F<sub>1</sub>]) また次の問題が Lee [L] により提起されてゐる。

問題3  $g$ -developable space は semi-stratifiable か?

#### REFERENCES

- [A] A.V. Arhangel'skii, Mappings and spaces, Russian Math. Surveys, 21 (1966), 115-162.
- [F<sub>1</sub>] L. Foged, On  $g$ -metrizability, Pacific J. Math, 98 (1982), 327-332.

- [F<sub>2</sub>] L.Foged, Characterizations of  $\aleph$ -spaces, Pacific J. Math., 110 (1984), 59-63.
- [F<sub>3</sub>] \_\_\_\_\_, A characterizations of closed images of metric spaces, to appear.
- [F<sub>4</sub>] \_\_\_\_\_, Normality in k-and- $\aleph$  spaces, to appear.
- [F<sub>5</sub>] \_\_\_\_\_, Weak bases for topological spaces, Washington University Dissertation (1979).
- [I] Y.Inui and Y. Kotake, Metrization theorems for some generalized metric spaces, Q. and A. in Gen. Top. 2 (1984), 147-155.
- [J] N.N.Jakovlev, On g-metrizable spaces, Soviet Math. Dokl. 17 (1976), 156-159.
- [L] K.B.Lee, On certain g-first countable spaces, Pacific J. Math., 65 (1976), 113-118.
- [M] H.W.Martin, A note on the metrization of  $\aleph$ -spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 57 (1976), 332-336.
- [O] P.OMeara, A metrization theorem, Math. Nachr., 45 (1970), 69-72.
- [S] F.Siwiec, On defining a space by a weak base, Pacific J. Math., 52 (1974), 233-245.